Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte)
Übung

1. Prüfen Sie, ob das Zahlentripel $(1; -1; 3)$ das Gleichungssystem löst. •∘∘

a) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ \text{II)} & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -2 \\ \text{III)} & -3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & & & x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & & x_2 & +x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 5 \end{array}$

2. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge. •∘∘

a) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ \text{II)} & & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ \text{III)} & & & x_3 & = & 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 3x_1 & +2x_2 & -4x_3 & = & 9 \\ \text{II)} & x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = & 16 \\ \text{III)} & 2x_1 & +6x_2 & +x_3 & = & 19 \end{array}$

c) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & = & 8 \\ \text{II)} & x_1 & +7x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ \text{III)} & 2x_1 & & -5x_3 & = & -5 \end{array}$

d) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 4 \\ \text{II)} & 3x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 5 \\ \text{III)} & 3x_1 & -x_2 & -5x_3 & = & 5 \end{array}$

3. Ermitteln Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme mit dem Verfahren von Gauß. •∘∘

a) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 3x & -2y & +5z & = & 13 \\ \text{II)} & x & -3y & -4z & = & 1 \\ \text{III)} & 5x & +6y & -z & = & 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & -x & +y & +2z & = & 0 \\ \text{II)} & x & -3y & +4z & = & 0 \\ \text{III)} & 2x & -4y & +3z & = & 0 \end{array}$

4. Berechnen Sie mit dem Verfahren von Gauß die Lösungsmenge der Systeme, die durch die erweiterten Koeffizientenmatrizen gegeben sind.

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$

5. Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, das… •∘∘

a) …die Lösung $L = \{(2; 0; -1)\}$ besitzt.

b) …die Lösungsmenge $L = \{(3; -4; 5)\}$ besitzt, wobei kein Wert der Koeffizientenmatrix den Wert Null annehmen soll.

6. Bestimmen Sie die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem die Lösungsmenge $L = \{(1; -2; 3)\}$ besitzt. •∘∘

$$\begin{array}{lcccccc} \text{I)} & 2x_1 & +ax_2 & +x_3 & = & 1 \\ \text{II)} & bx_1 & & +x_3 & = & 4 \\ \text{III)} & 4x_1 & -x_2 & +cx_3 & = & -3b \end{array}$$

7. Begründen Sie rechnerisch, dass das folgende System nicht lösbar ist. •∘∘

$$\begin{array}{lccccc} \text{I)} & x & +y & -2z & = & 4 \\ \text{II)} & 4x & -2y & -2z & = & 3 \\ \text{III)} & -5x & +4y & +z & = & 1 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte)
Lösung

1.
   a) Einsetzen des Zahlentripels in jede der drei Gleichungen ergibt eine wahre Aussage, also löst das Zahlentripel das Gleichungssystem.

   b) In Zeile I) ergibt sich bereits ein Widerspruch, also wird das System nicht gelöst.

2. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge.

   a) $L = \{(1; 2; 1)\}$

   b) $L = \{(3; 2; 1)\}$

   c) $L = \{(5; -2; 3)\}$

   d) $L = \{(0{,}5; -3{,}5; 0)\}$

3.
   a) $L = \{(2; -1; 1)\}$

   b) $L = \{(0; 0; 0)\}$. Befinden sich auf der rechten Seite des Gleichungssystems ausschließlich Nullen, so nennt man es ein sogenanntes **homogenes** lineares Gleichungssystem. $(0; 0; 0)$ ist hier stets eine Lösung.

4.
   a) $L = \{(-1; 0; 3)\}$

   b) $L = \{(3; 3; -4)\}$

5.
   a) z.B.
$$\begin{array}{lcccrr} \text{I)} & x_1 & & & = & 2 \\ \text{II)} & & x_2 & & = & 0 \\ \text{III)} & & & x_3 & = & -1 \end{array}$$

   b) z.B.
$$\begin{array}{lcccrr} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ \text{II)} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 9 \\ \text{III)} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}$$

6. Einsetzen der Lösung in das Gleichungssystem ergibt $a = 2$, $b = 1$ und $c = -3$.

7. Das Gauß-Verfahren liefert einen Widerspruch in Zeile III).